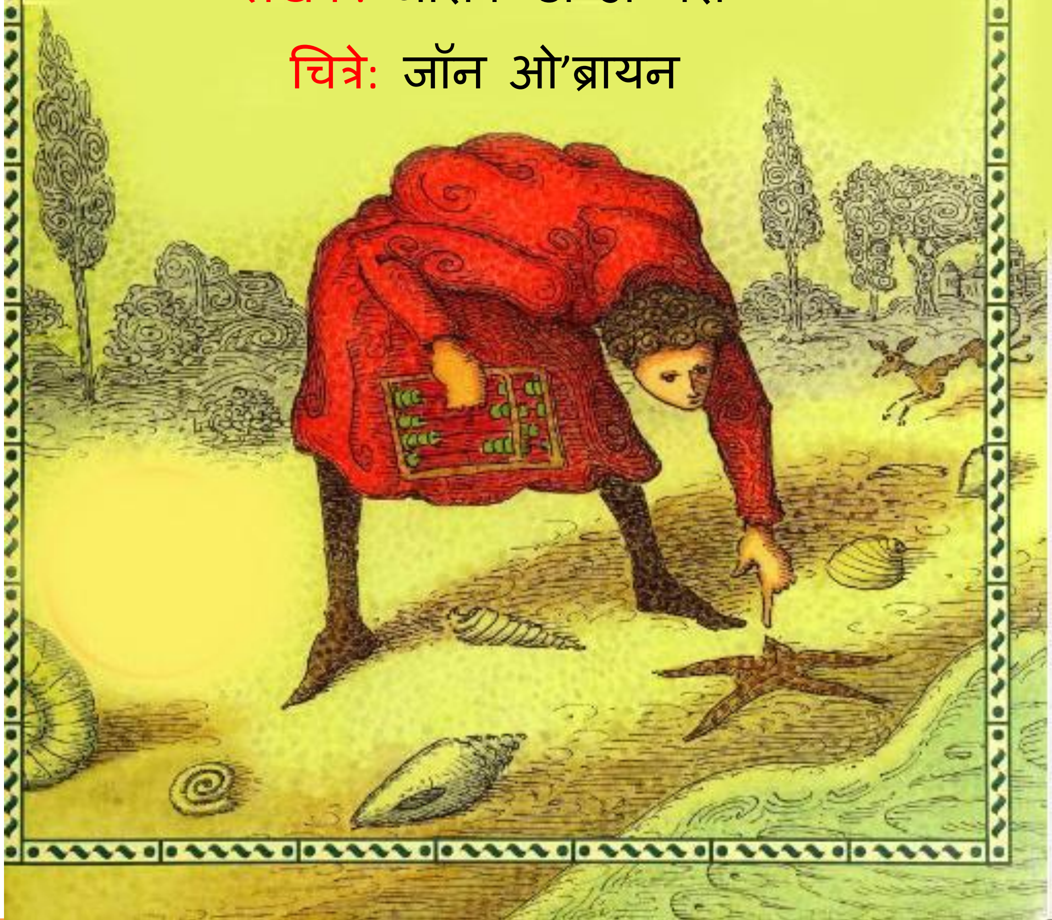
मूर्ख गणितज्ञ

फिबोनाची

लेखक: जोसेफ डी' ॲग्नेस

चित्रे: जॉन ओ'ब्रायन



मध्ययुगीन इटली देशात लिओनार्दो फिबोनाची नावाचा एक तरुण मुलगा अहोरात्र संख्यांचा विचार करत बसे. त्यामुळे लोक त्याला मूर्ख म्हणत असत.

लिओनार्दो मोठा झाला तेव्हा त्याने जगभर प्रवास केला. तो वेगवेगळ्या देशांत वापरल्या जाणाऱ्या अंकांनी भारून गेला. विशेषत: आफ्रिकेत शिकलेल्या हिंदू-अरबी अंकांनी त्याला भुरळ घातली. त्याला जाणवलं की निसर्गात कित्येक गोष्टींमध्ये एक निश्चित रचनाबंध आहे. ज्या मुलाला सगळे बावळट म्हणत, त्या मुलाने एक अगदी नवा शोध लावला. या शोधाला आज फिबोनाची मालिका म्हणून ओळखतात.

आज लिओनार्दो फिबोनाची *सशांचे प्रजोत्पादन* या साध्याशा गणितासाठी प्रसिद्ध आहे. त्याला एक महान पाश्चात्य गणितज्ञ मानले जाते. तो निश्चितच मूर्ख नव्हता हे सिद्ध करणारी ही विलक्षण कहाणी.

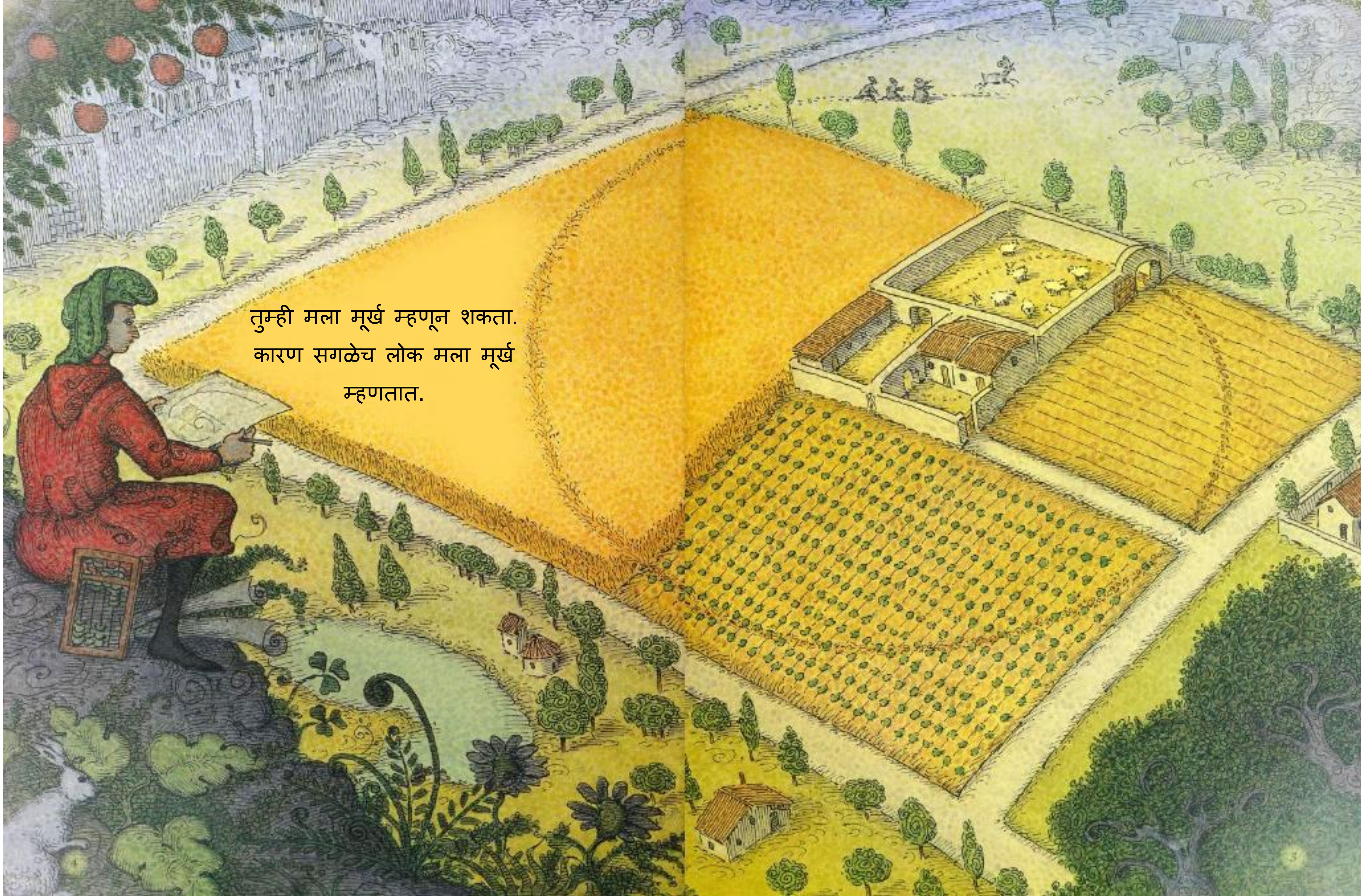


मूर्ख गणितज्ञ

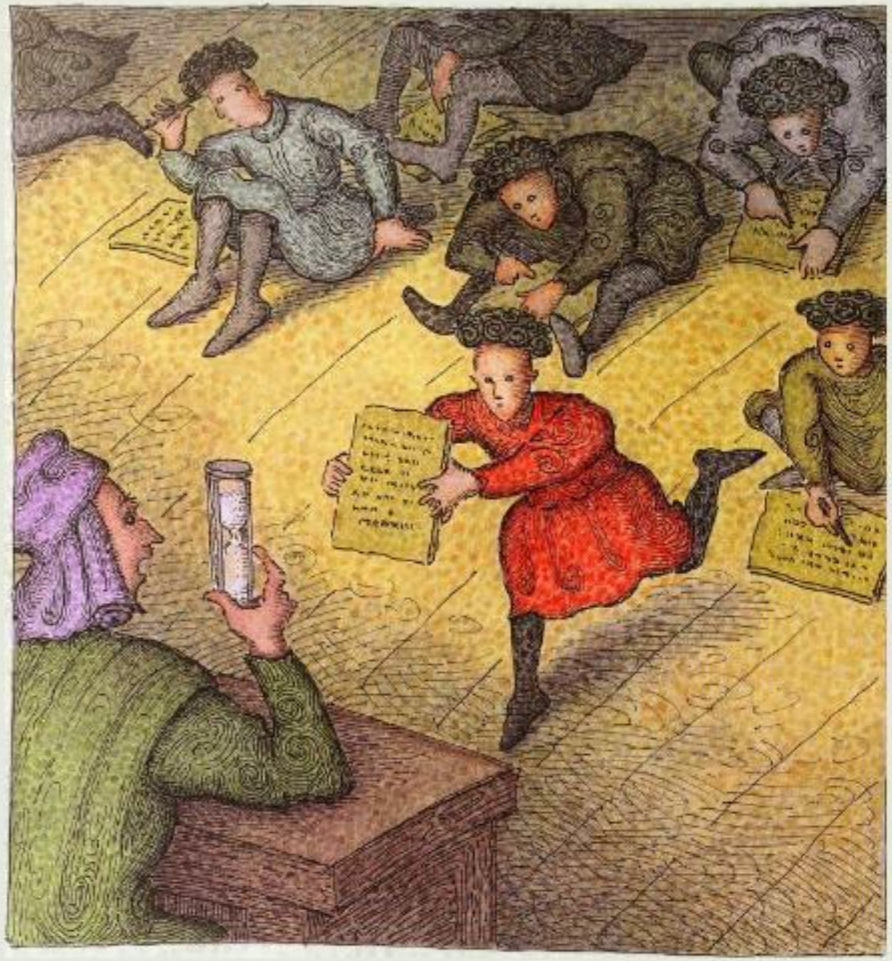
फिबोनाची

मराठी अनुवाद: सुशील मेन्सन



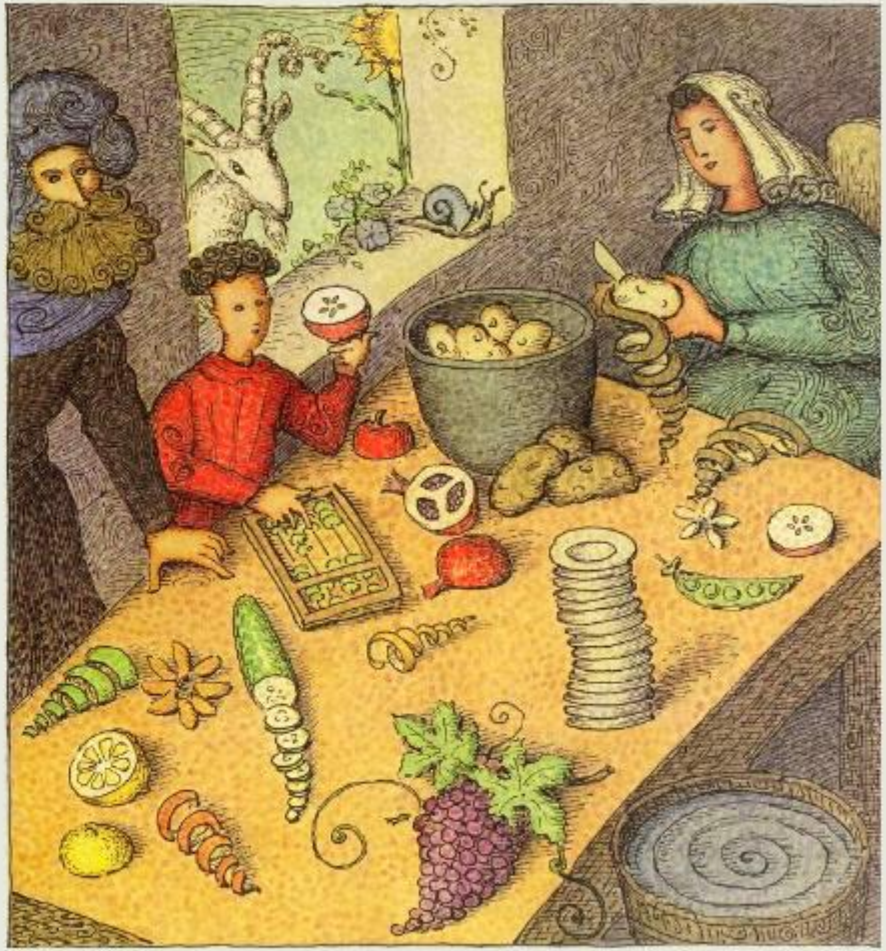


तुम्ही मला मूर्ख म्हणून शकता.
कारण सगळेच लोक मला मूर्ख
म्हणतात.



मी लहान होतो तेव्हा एके दिवशी शिक्षकांनी वर्गात एक गणित सोडवायला दिलं. त्यासाठी आम्हाला दहा मिनिटांचा वेळ दिला. पण मी ते गणित फक्त दोन सेकंदात सोडवलं.

मी गणितात कुशाग्र होतो. लहानपणापासूनच माझं गणितावर खूप प्रेम होतं. माझ्या आईवडिलांच्या घरी जिथे बघावं तिथे मला मोजण्यासारखं काही ना काही नक्कीच मिळायचं.





त्या दिवशी वर्गातल्या विद्यार्थ्यांनी ॲबॅकसवर गणित सोडवलं. त्यांनी उत्तरं रोमन अंकांत लिहिली. त्याला खूप वेळ लागायचा. पण तेव्हा गणित सोडवायचा हाच एक मार्ग होता.

इतर विद्यार्थ्यांना गणित सोडवायला इतका वेळ लागतो, हे बघून मला खूप कंटाळा आला.

मग मी बाहेर झाडावर बसलेले पक्षी मोजत बसलो. किती पाय आहेत त्या पक्ष्यांना? मला नवल वाटलं. त्यांना किती डोळे आहेत? किती पंख आहेत? आणि प्रत्येक पक्षी दोन सेकंद गाऊ लागला तर एकामागोमाग सगळ्यांना गाण्यासाठी किती वेळ लागेल?

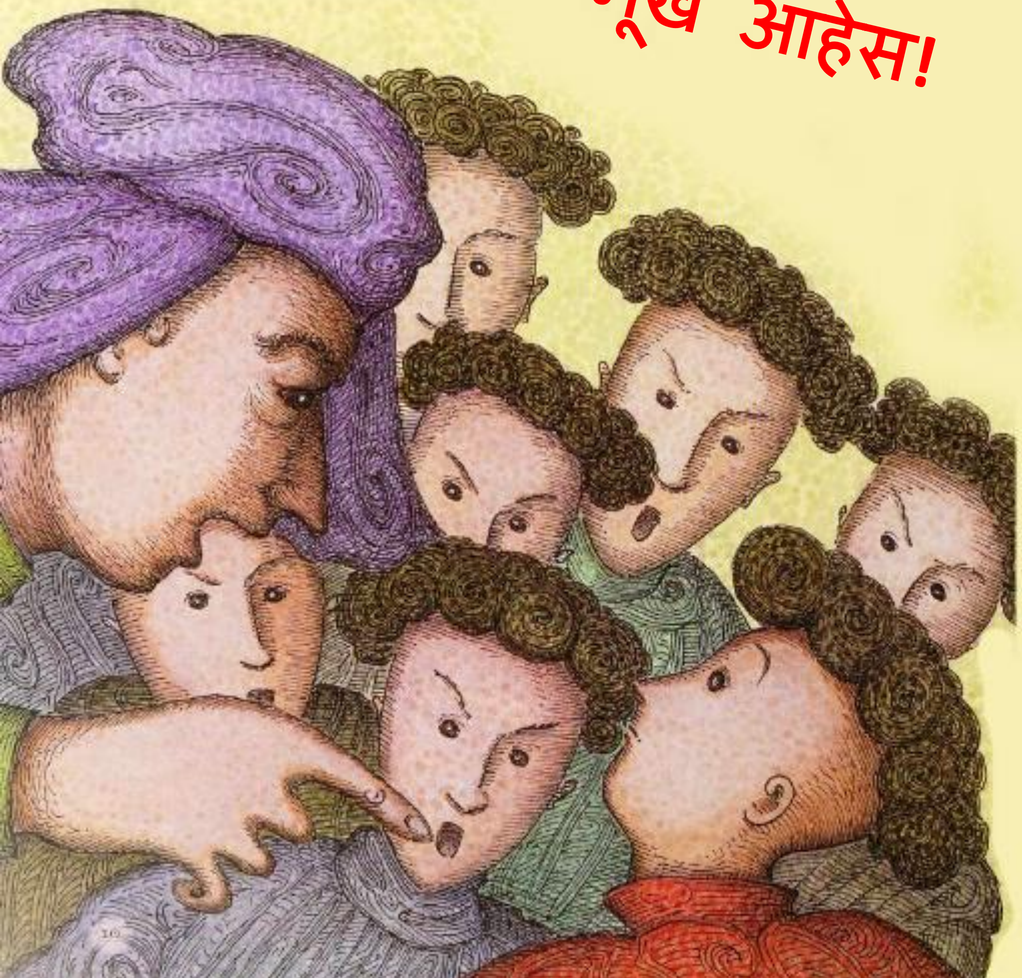
हे प्रश्न इतके सुंदर होते की मी दिवास्वप्नं पाहू लागलो.

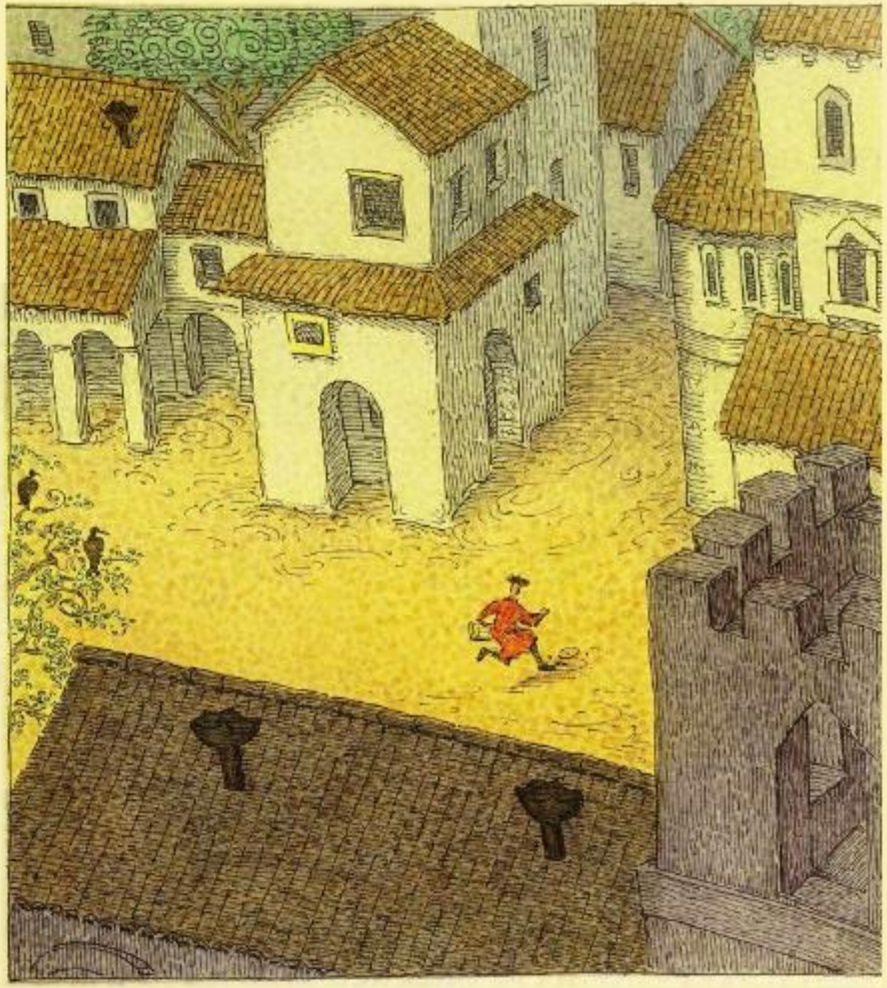


“लिओनार्दो!” माझे शिक्षक खेकसले. “माझ्या वर्गात दिवास्वप्न पाहायचं धाडस कसं करतोस?”

“पण सर,” मी म्हणालो, “मी विचार करत होतो – “

“अच्छा!” शिक्षक ओरडले. “हाच तर त्रास आहे! या वर्गात कुणी विचार करायचा नाही – फक्त काम करायचं! तू विसराळू, आळशी, दिवास्वप्न पाहाणारा आहेस, तू....तू **मूर्ख आहेस!**





हे ऐकून इतर मुलं हसू लागली.

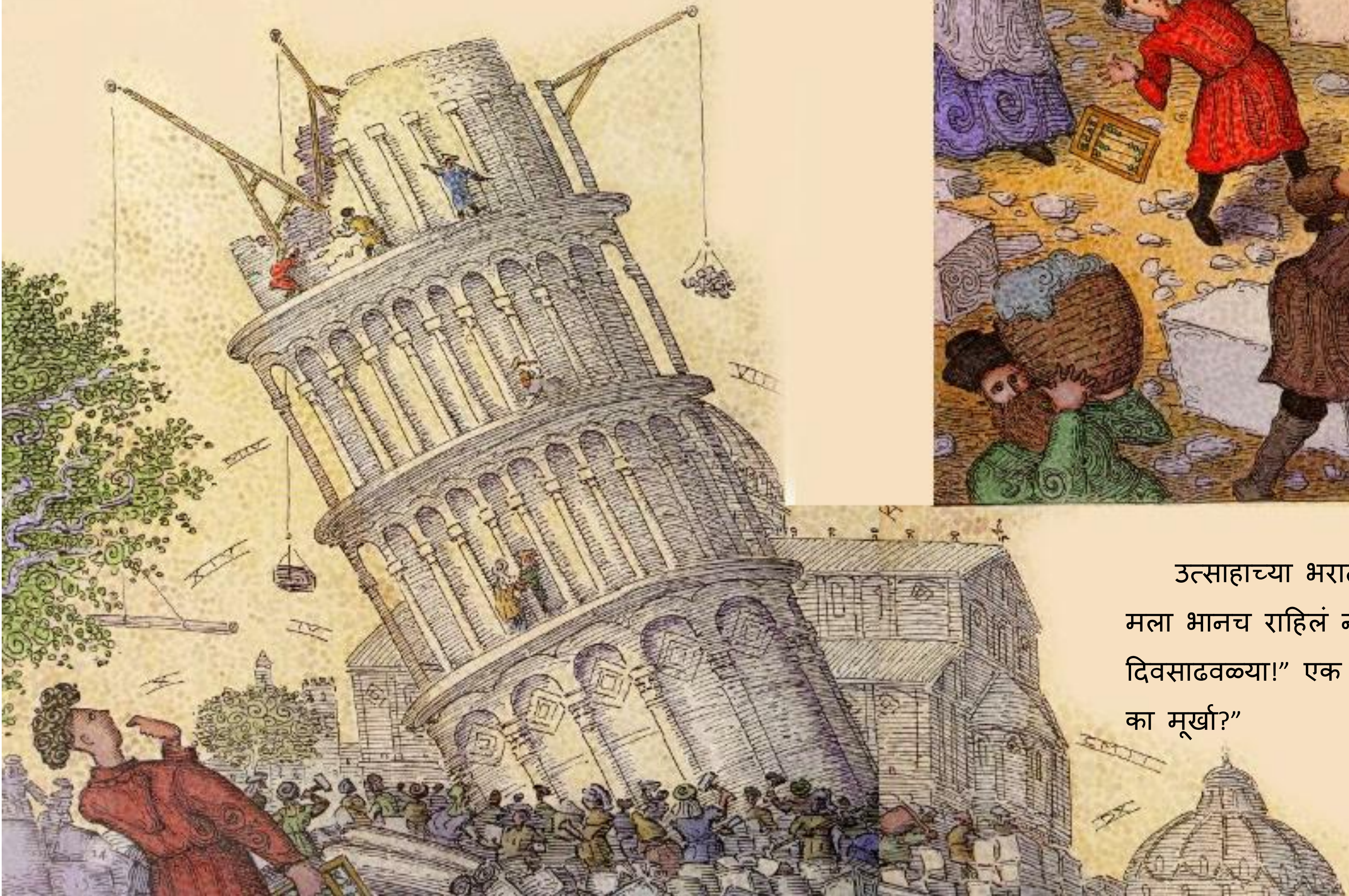
“मूर्ख! मूर्ख!” ते ओरडू लागले. मला इतकं दु:ख झालं की मी शाळेतून बाहेर पळालो आणि पीसाच्या रस्त्यांवर भटकू लागलो.

मी शहरातील गजबज पाहिली, ऐकली. किती छान शहर होतं ते! ते वर्ष होतं ई.स.1178 आणि *पीसा* हे इटलीतलं सर्वात मोठं शहर होतं.



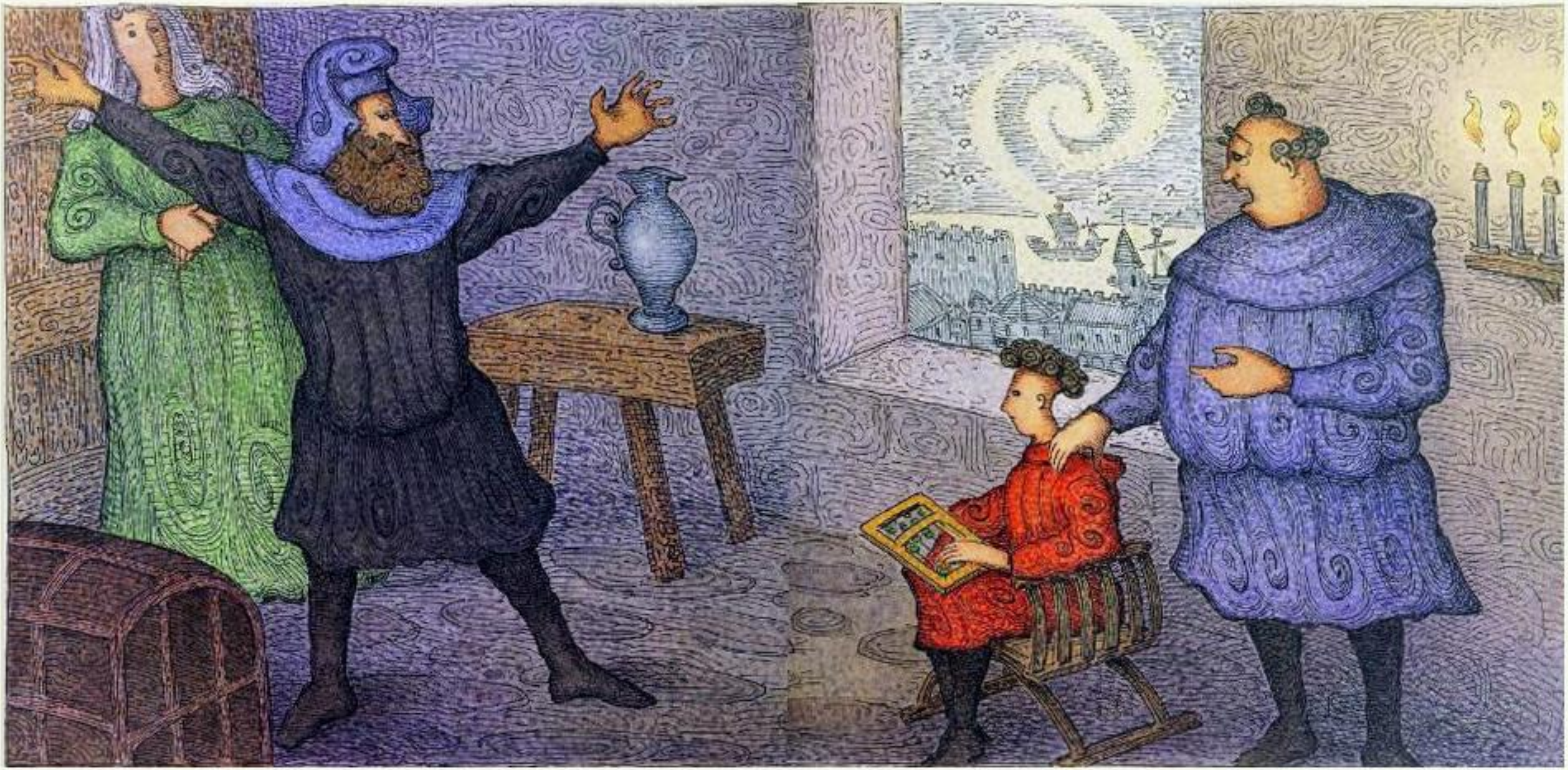
तेथील चर्चच्या प्रांगणात मजूर एक नवी इमारत उभी करत होते. पण इमारतीच्या गणितात काही गंभीर त्रुटी राहून गेली होती!

माझ्या सभोवती मी संख्यांचा नाद ऐकला, पाहिला. कितीतरी लोक त्यांच्या कामात गणित वापरत होते. माझं मन तरंगू लागलं.





उत्साहाच्या भरात मी कुठे चाललोय याचं मला भानच राहिलं नाही. “स्वप्नं पाहातोयस दिवसाढवळ्या!” एक बाई खेकसली. “दिसत नाही का मूर्खा?”



त्या रात्री माझे वडील खूप रागावले. “शहरातले सगळे लोक बोलतायत!” ते ओरडू लागले. “प्रत्येकजण म्हणतोय की माझा मुलगा बावळट आहे. ते तुला मूर्ख म्हणतायत. मला हे अजिबात आवडलेलं नाही.”

“तू बहुधा या मुलाशी जास्तच कठोर वागतोयस, *सिग्नर*

“चूप!” वडील ओरडले. “लिओनार्दो, तू माझ्यासोबत आफ्रिकेला चल. मग लोक तुला नावं ठेवायचं बंद करतील. मी तुला व्यापार करायला शिकवेन!”

“छे!” माझ्या मनात आलं. “इथे व्यापारी बनायची हौस आहे कुणाला?”



निघण्याच्या आदल्या रात्री मी झोपू शकलो नाही. दुःखाच्या भरात असताना मी एक उल्का समुद्रात पडताना पाहिली.

त्या ताऱ्याच्या प्रकाशात मला माझा एक जुना मित्र दिसला. माझ्या डोळ्यातले अश्रू सुकेपर्यंत त्याने वाट पाहिली.

“मला वाटतं की लोक सर्वाधिक आनंदी तेव्हाच असतात जेव्हा ते आपल्या पसंतीचं काम करतात,” अल्फ्रेडो म्हणाला. “बघ, मला चीज आवडतं. आणि तुला, लिओनार्दो बाळा, तुला कशात आनंद मिळतो?”

“संख्यांमध्ये,” मी विचार न करता बोललो.

“मग तू संख्यांबद्दल शक्य तितकी माहिती शिकून घे. त्यामुळे तू नेहमी आनंदी राहाशील.”



मी अल्फ्रेडोचा सल्ला मानायचं ठरवलं. माझे वडील मला आफ्रिकेच्या उत्तरेकडे असलेल्या *बुगिया* नावाच्या शहरात राहायला घेऊन गेले. माझ्या या नव्या देशात अरब व्यापारी रोमन अंक वापरत नाहीत, असं मला दिसलं. ते भारतीय हिंदू लोकांकडून शिकलेले अंक वापरत होते. इटलीत आम्ही लिहायचो: XVIII

पण येथील व्यापारी लिहायचे: 18

किती सोप्पं होतं हे!

मला या अंकांची आणखी माहिती घ्यावीशी वाटू लागली.

दिवसा मी वडिलांच्या व्यापाराचे हिशोब करायचो. रात्री मी अल्फ्रेडोसोबत जायचो आणि नवे चमत्कारिक अंक शिकायचो.





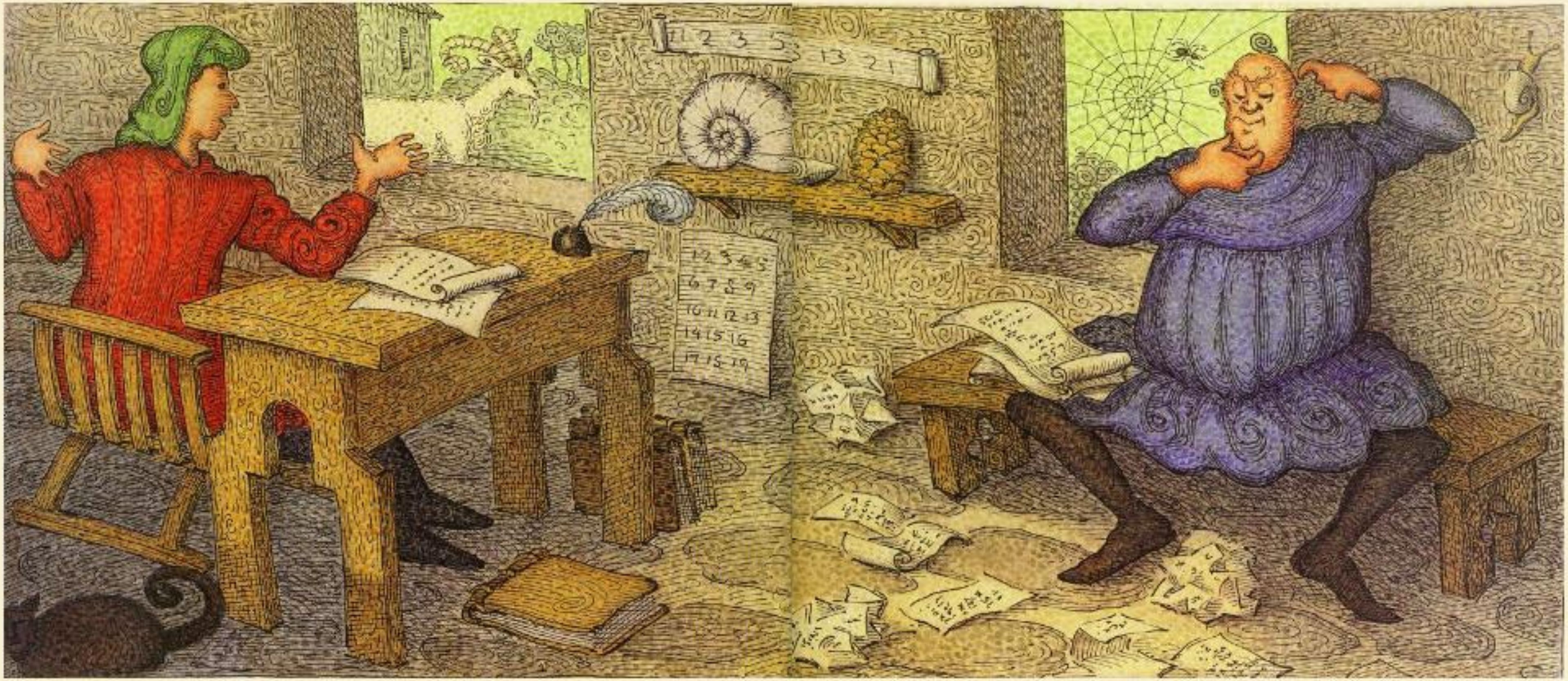








मी वयाने मोठा झाल्यावर वडील कधीकधी मला व्यापारासाठी दौऱ्यांवर पाठवायचे. मला काम नसे तेव्हा मी प्रत्येक शहरातल्या बुद्धिमान व्यक्तिंना भेटायचो. प्राचीन राजे आणि त्यांची प्रजा अपूर्णांक कसे वापरायचे, हे इजिप्तमध्ये मी शिकलो. मी तुर्कस्थानमधील *इस्तंबूल* आणि सिरीयातील *दमास्कस* यांदरम्यानचं अंतरही मोजलं. ग्रीसमध्ये, मी गणिताच्या प्राचीन पुस्तकांतून भूमिती शिकलो. *सिसिली*मध्ये, माझं भागाकार आणि वजाबाकी करण्याचं कौशल्य चांगलं कामी आलं. फ्रान्समध्ये....मी माशाचं सूप प्यालो.



एके दिवशी, मी हिंदू-अरेबिक अंकांवर एक पुस्तक लिहायला सुरुवात केली. मी त्यात काही कोडी घातली, जसे: एक माणूस होता. त्याने सशाच्या दोन पिल्लांना शेतात सोडलं. सशाची पूर्ण वाढ व्हायला आणि नव्या पिल्लांना जन्म देण्यास तयार व्हायला एक महिना लागतो. त्यानंतर पिल्लांच्या जोडीला प्रत्यक्ष जन्माला घालण्यास आणखी एक महिना लागतो.

दर महिन्याला, पूर्ण वाढ झालेली सशाची जोडी नव्या पिल्लांच्या जोडीला जन्म देते.

मग वर्षाच्या अखेरीस एकूण किती सशांच्या जोड्या त्या माणसाकडे असतील?

अल्फ्रेडोने हे गणित सोडवायचा प्रयत्न केला. पण त्याला काही ते जमलं नाही.

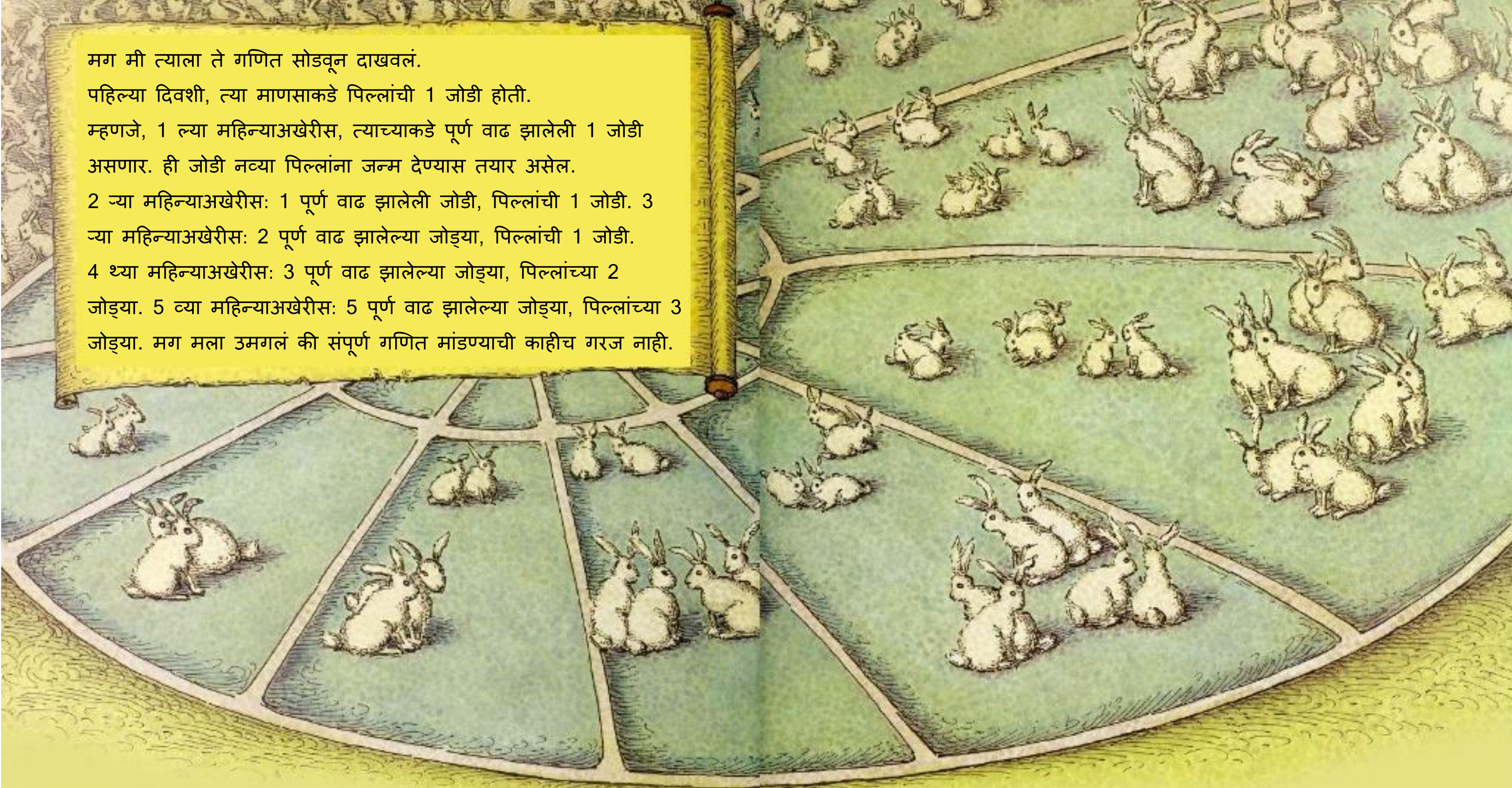
मग मी त्याला ते गणित सोडवून दाखवलं.

पहिल्या दिवशी, त्या माणसाकडे पिल्लांची 1 जोडी होती.

म्हणजे, 1 ल्या महिन्याअखेरीस, त्याच्याकडे पूर्ण वाढ झालेली 1 जोडी असणार. ही जोडी नव्या पिल्लांना जन्म देण्यास तयार असेल.

2 ऱ्या महिन्याअखेरीस: 1 पूर्ण वाढ झालेली जोडी, पिल्लांची 1 जोडी. 3 ऱ्या महिन्याअखेरीस: 2 पूर्ण वाढ झालेल्या जोड्या, पिल्लांची 1 जोडी.

4 थ्या महिन्याअखेरीस: 3 पूर्ण वाढ झालेल्या जोड्या, पिल्लांच्या 2 जोड्या. 5 व्या महिन्याअखेरीस: 5 पूर्ण वाढ झालेल्या जोड्या, पिल्लांच्या 3 जोड्या. मग मला उमगलं की संपूर्ण गणित मांडण्याची काहीच गरज नाही.



आपण लगतच्या दोन संख्या मिळवल्या तर आपल्याला पुढची संख्या मिळते.

1 जोडी + 1 जोडी = 2 जोड्या.

1 जोडी + 2 जोड्या = 3 जोड्या.

2 जोड्या + 3 जोड्या = 5 जोड्या.

अशा प्रकारे बनणाऱ्या मालिकेतल्या काही संख्या नमुन्यादाखल पुढे दाखवल्या आहेत:

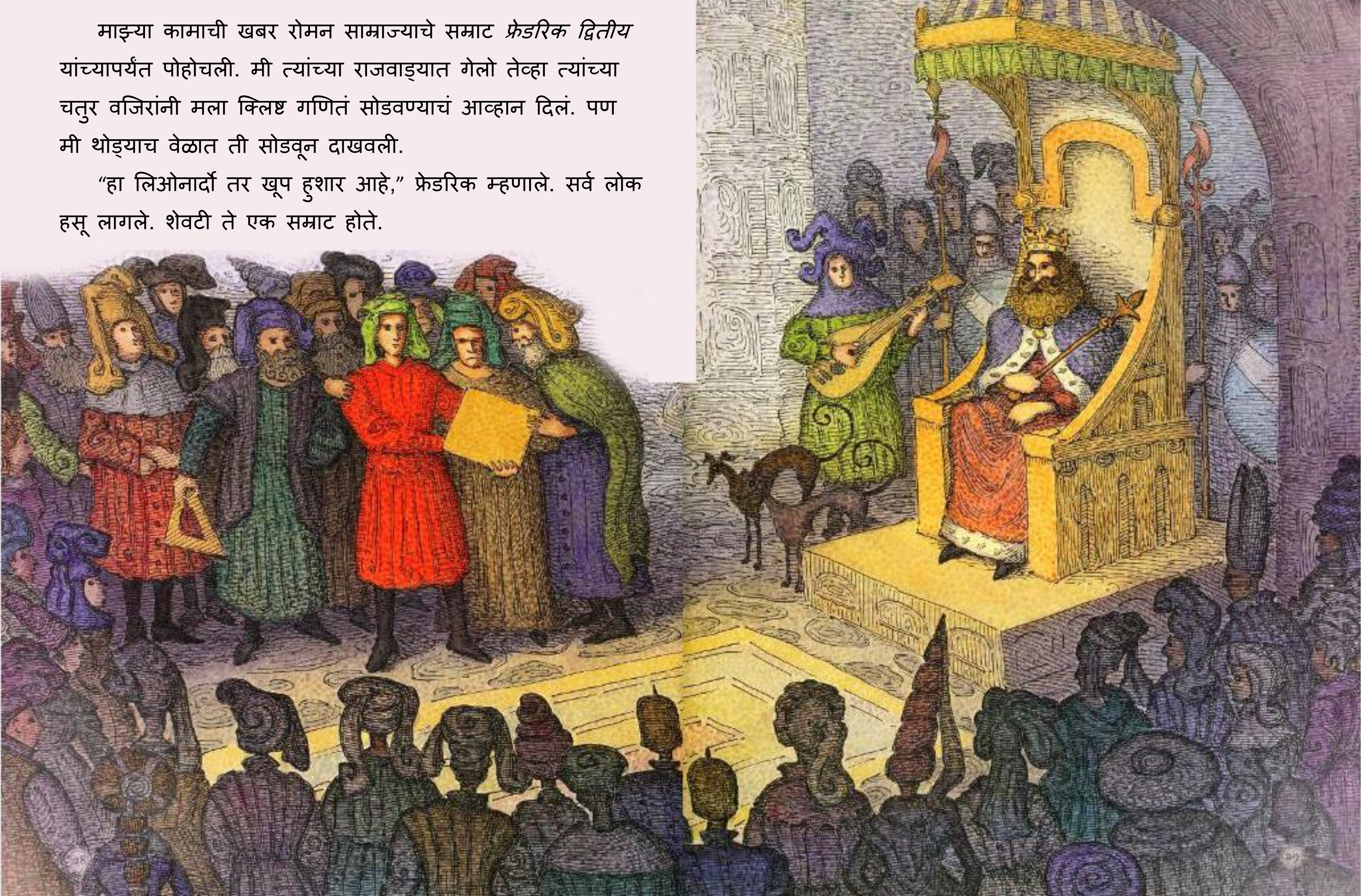
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

म्हणजे, आपल्याकडे वर्षभरात सशांच्या 233 जोड्या होतील.

(किंवा 377, जर आपण पूर्ण वाढ झालेल्या सशांपासून सुरुवात केली तर!)

माझ्या कामाची खबर रोमन साम्राज्याचे सम्राट *फ्रेडरिक द्वितीय* यांच्यापर्यंत पोहोचली. मी त्यांच्या राजवाड्यात गेलो तेव्हा त्यांच्या चतुर वजिरांनी मला क्लिष्ट गणितं सोडवण्याचं आव्हान दिलं. पण मी थोड्याच वेळात ती सोडवून दाखवली.

"हा लिओनार्दो तर खूप हुशार आहे," फ्रेडरिक म्हणाले. सर्व लोक हसू लागले. शेवटी ते एक सम्राट होते.





मला माझ्या कर्तबगारीचा अभिमान वाटला. पीसाला परतल्यावर, एकदा मी बाजारात काही लोकांना बोलताना ऐकलं. “तो बोनॅस्सिओचा मुलगा,” एक माणूस म्हणाला. “आपण भारतीय अंक वापरले पाहिजेत, असं सगळ्यांना सांगत फिरतोय.”

“जुन्या अंकांमध्ये काय वाईट आहे?” दुसऱ्या माणसाने विचारलं. “जर जुने अंक रोमन लोक बऱ्यापैकी वापरू शकतात, तर मीसुद्धा ते बऱ्यापैकी वापरू शकतो!”

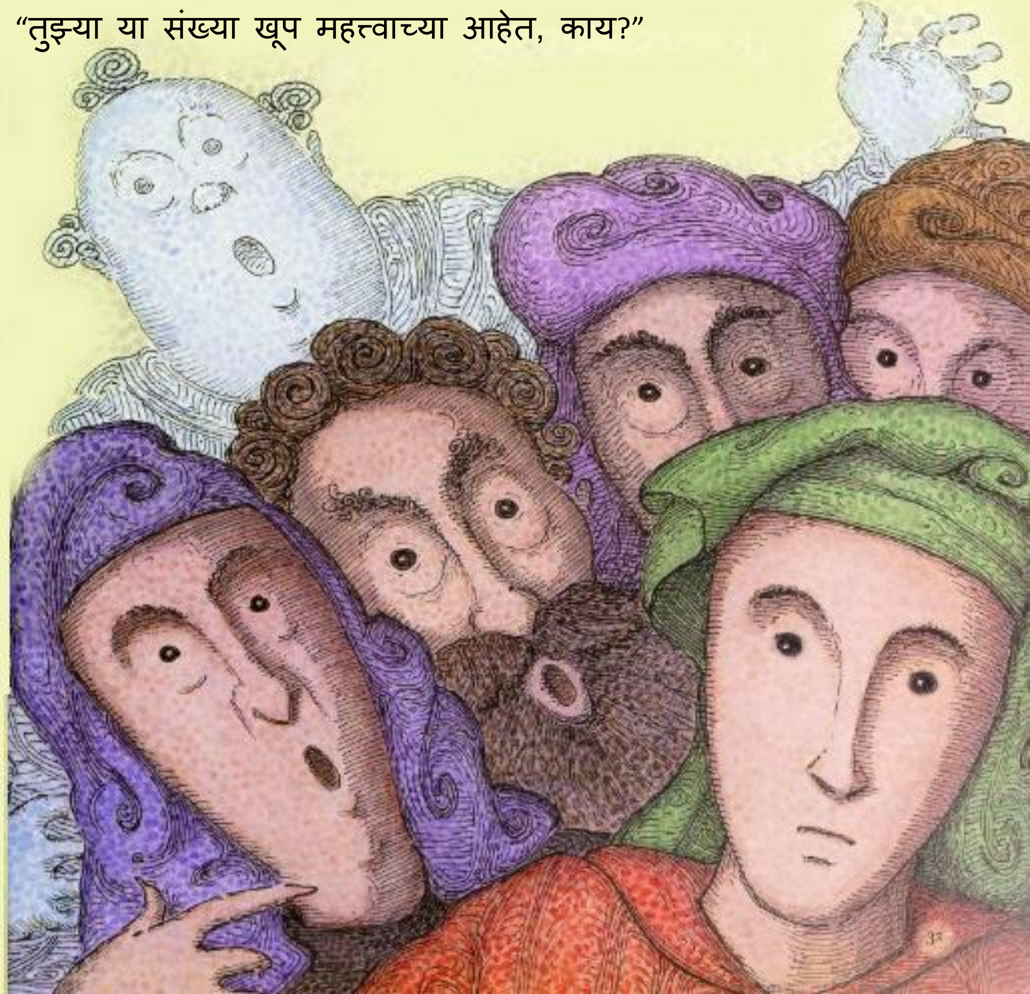
“किती मूर्ख आहे तो मुलगा!”

अचानक मी पुन्हा दु:खी झालो. “लोक ऐकत नसतील तर काय फायदा या कामाचा?” माझ्या मनात आलं. “लोक मला कायम मूर्ख म्हणूनच आठवणीत ठेवणार बहुधा.”

मला कुतूहल होतं की माझा जुना मित्र अल्फ्रेडोचं यावर काय मत असेल. तो माझ्यासोबत आहे, असं अचानक मला वाटू लागलं.

“या मूर्खांचं ऐकू नकोस, लिओनार्दो!” अल्फ्रेडो गरजला.

“तुझ्या या संख्या खूप महत्त्वाच्या आहेत, काय?”



“निश्चितच आहेत!” मी म्हणालो. “कधी ना कधी हिंदू-अरेबिक अंक साऱ्या जगभर पोहोचतील. मी त्यांचा जितका जास्त अभ्यास करतोय, तितकंच मला त्यांचं नवल वाटतंय.”

मग मी समुद्रकिनाऱ्यावरच्या एका फुलाकडे बोट दाखवलं. “किती पाकळ्या आहेत या फुलात?”

अल्फ्रेडो मोजून म्हणाला, “एकवीस.”

“आणि या फुलात?”

“तेरा,” तो उत्तरला. “पण त्याचं काय?”

मी लगेच त्याचं कुतूहल शमवलं नाही. आम्ही रात्रभर वस्तू मोजत किनाऱ्यावर फिरत राहिलो.



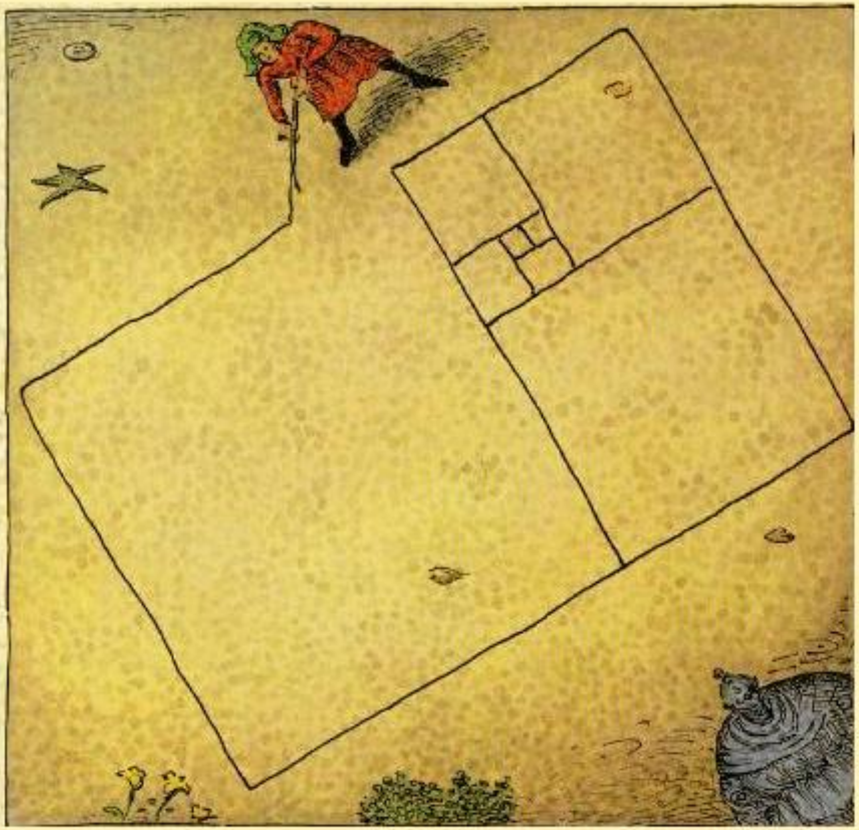


आम्ही तीन पाकळ्यांची, पाच पाकळ्यांची आणि आठ पाकळ्यांची फुलं मोजली. आम्ही तारामाशाचे बाहू आणि सफरचंदाच्या आतील बिया मोजल्या.

“बघतोयस अल्फ्रेडो?” मी म्हणालो. “मी जे काही मोजतोय, जिथे कुठे नजर टाकतोय, मला त्याच संख्या दिसतायत. तुला येतंय का ओळखता?”

अल्फ्रेडो मोठ्या आवाजात बोलू लागला “1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.... अरे देवा! या तर तुझ्या सशाच्या गणितातल्या संख्या आहेत!”

“अगदी खरं,” मी म्हणालो. “आत्ता कुठे सुरुवात झालीय!”



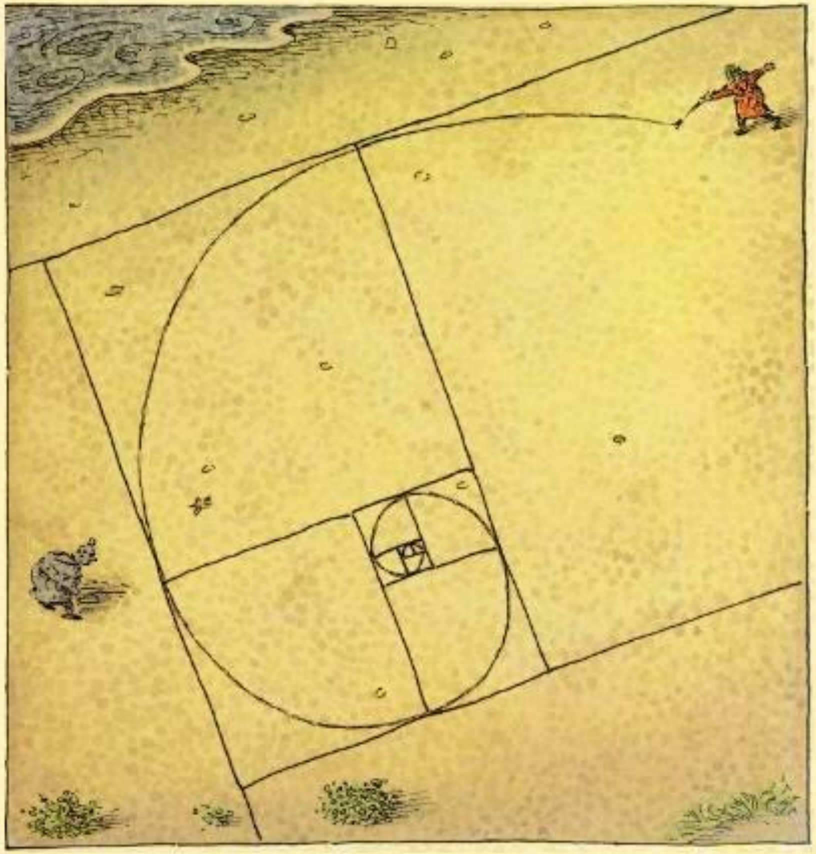
“अशाच पद्धतीने मी चौरस काढत गेलो,” मी म्हणालो, “पण या सर्वांना हे असं....जोडल्याशिवाय ते बरोबर वाटणार नाहीत. त्यांच्या आतमध्ये काय काढलंय, याचा अंदाज बांधता येईल तुला?” अल्फ्रेडोला जमलं नाही.

“सर्पिलाकृती!” मी ओरडलो. “माझ्या या संख्यांनी तू सर्पिलाकार काढू शकतोस!”

“आश्चर्य आहे!” अल्फ्रेडो म्हणाला.

“अलिकडे मी या संख्यांचा वेगळ्या तऱ्हेने विचार केला. बघ!”

मी वाळूत एक छोटासा चौरस काढला, 1 x 1 आकाराचा समजा. त्याच्या लगत आणखी एक हुबेहूब तसाच चौरस काढला. त्यांच्या एकूण लांबीलगत 2 x 2 आकाराचा चौरस काढला. मग त्यांच्या लगत 3 x 3 आकाराचा चौरस काढला. मग त्यांच्या लगत 5 x 5 आकाराचा चौरस, मग 8 x 8 आकाराचा चौरस, 13 x 13 आकाराचा चौरस.



“खरंच आश्चर्य आहे,” मी म्हणालो. “पण मला अजूनही कळत नाहीये की या संख्या इतक्या खास का आहेत.”

“तुला कळतंय का, लिओनार्दो?” अल्फ्रेडो म्हणाला. “विश्वरचना करताना निसर्गानेच या संख्या वापरल्यायत. निसर्गाने अनेक ठिकाणी या संख्यांना लपवलंय. कुणाला कळलेलं नाहीये हे अद्याप.”



अल्फ्रेडोच्या शब्दांनी माझं हृदय उचंबळून आलं. आयुष्यभर मला लोकांनी मूर्ख म्हणून हिणवलं, कारण मी संख्यांच्या जगात असायचो. पण काय वाईट होतं त्यात? निसर्गालाही संख्या पसंत आहेत!”

अल्फ्रेडोला आनंद झाला. “लहानात लहान रोपट्यापासून सुंदर पाईनकोन फळापर्यंत, सर्वात मोठ्या फुलापासून समुद्राच्या लाटांपर्यंत तसंच सर्वात दूर असलेल्या दिर्घिका या साऱ्यांमध्ये तुझ्याच संख्या दिसतायत, लिओनार्दो.”

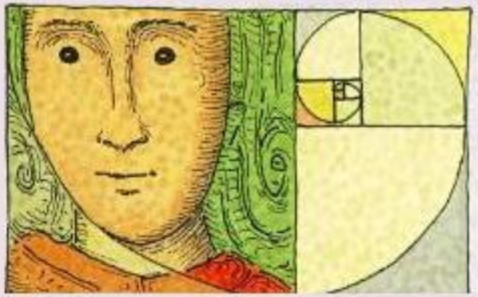




आता मी म्हातारा झालोय, पण संख्या मला आजही भुरळ घालतात. मी अल्फ्रेडोला त्या रात्री सांगितलेलं हे गुपीत उभ्या आयुष्यात आणखी कुणाजवळ उघड केलं नाही.

पण आता मी ते तुमच्यापाशी उघड केलंय.

पुन्हा एकदा हे पुस्तक वाचा. तुम्हाला माझ्या संख्या दैनंदिन आयुष्यात नक्कीच दिसतील. आता तुम्हाला समजलं असेल की मूर्ख म्हटल्यावरही मला आता राग का येत नाही!





पीसाचा लिओनार्दो
(1170 – 1240)

लिओनार्दो फिबोनाची या गणितज्ञाबद्दल फारशी माहिती उपलब्ध नाही. ही कहाणी काही ज्ञात तर काही काल्पनिक माहितीच्या आधारे रचलेली आहे. लिओनार्दोचं लाडाचं नाव *बिगोलो*. त्याचं भाषांतर भटक्या किंवा प्रवासी असं होतं. त्याचा अर्थ आळशी, सप्नाळू वा मूर्ख असाही होऊ शकतो.

आज लिओनार्दोला मध्ययुगातील सर्वात महान पाश्चात्य गणितज्ञ मानलं जातं. इटलीतल्या पीसा शहरात त्याचा पुतळा उभा करण्यात आला आहे. पीसाच्या जगप्रसिद्ध कलत्या मनोऱ्यापासून तो फार दूर नाही. लिओनार्दोने हिंदू-अरेबिक अंक जगासमोर आणण्यासाठी अपार प्रयत्न केले. आज जगभर याच अंकांचा वापर केला जातो.

लिओनार्दोला त्याच्या सशाच्या गणितात दिसणाऱ्या संख्यामालिकेसाठी सर्वाधिक ओळखलं जातं. आज या संख्यामालिकेला फिबोनाची मालिका म्हणतात. फिबोनाची म्हणजे बोनॅस्सिओचा मुलगा. संशोधक आणि गणितज्ञ आता जाणतात की ही संख्यामालिका खूप खास आहे. फुलांसारख्या सजीव गोष्टीत एक विशिष्ट रचनाबंध तयार होण्याचा आराखडा या संख्यामालिकेत लपलेला आहे. इमारती, संगीत, कला आणि काव्य या मानवी कल्पनांमध्येही फिबोनाची संख्यामालिका डोकावते.

पण इतिहासकारांच्या मते, लिओनार्दोला या संख्यांचं महत्त्व कधीच जाणवलं नाही.

असेल का जाणवलं त्याला?